

## 두가지 이산 반복제어 시스템의 해석 및 설계

장우석\*, 김군진\*, 김준동\*, 서일홍\*\*

\* 大宇電子(株) 映像研究所 研究 5팀, \*\* 漢陽大 工大 電子工學科

## Analysis and Design of Two Types of Digital Repetitive Control Systems

Woo-Sok Chang\*, Gun-Jin Kim\*, June Dong Kim\* and Il Hong Suh\*\*

• Team 5, Video Research Center, Daewoo Electronics Co., Ltd.,

\*\* Dept. of Electronics Eng., Hanyang Univ.,

## Abstract

Two types of digital repetitive control systems are analyzed and designed to reduce the error spectrum including not only harmonic but also non-harmonic components. First, a novel gain scheduling algorithm is suggested for conventional and modified repetitive control systems, in which the gain of repetitive controller is scheduled to reduce the infinite norm of error in frequency domain. For this, the relative error transfer function is newly defined as the ratio of the error spectrum for the system with a repetitive controller to the error spectrum for the system without a repetitive controller. Secondly, as an alternative of a repetitive control system with the gain Scheduling, a repetitive control system with higher order repetitive function is analyzed and designed, where instead of equal weightings, weightings of the higher order repetitive function is determined in such a way that the infinite norm of relative error transfer function is minimized.

To show the validities of proposed methods, computer simulation results are illustrated for a typical disk drive head positioning servo system.

## 1 서론

반복작업을 수행하는 산업용 로봇 제어 시스템<sup>[7]</sup>, 디스크 드라이브의 헤드위치제어 시스템<sup>[3][4]</sup>, 캡코더의 캡스턴 모터 속도제어 시스템<sup>[8]</sup> 등과 같이 오차가 반복적으로 나타나고, 그 주기가 알려진 시스템에 대하여, 효과적으로 반복적 오차 혹은 하모닉오차(repetitive errors and/or harmonic errors)를 감소시키기 위해 내부 모델 정리에 근거한 많은 반복제어 시스템이 제안되었다. 처음에는 연속시간 영역에서의 반복제어 시스템이 제안되었다<sup>[1,2]</sup>. 그리고 이어 많은 사람들에 의해 이산시간 영역에서의 반복제어 시스템이 제안되었다<sup>[3,4,5]</sup>. 또한 반복 제어기 설계시, 모델링 불확실성

(modelling uncertainty)에 대한 시스템의 강인성(robustness)확보를 위해 수정 반복 제어기(modified repetitive controllers)가 제안되었다<sup>[1,3,4]</sup>. 그러나 불행하게도 하모닉 오차를 감소시키기위해 반복제어기들을 적용할 때 비하모닉 오차(non-harmonic errors)는 때때로 증폭될 수 있다. 이러한 문제점을 완화시키기위해 Inoue<sup>[6]</sup>는 반복제어기의 이득감소와 균일한 가중치를 갖는 다주기 평활화 함수(smoothing function over periods) (이하 본 논문에서는 고차 반복 함수라 명명함)의 적용이 하나의 해결 방안이 될 수 있음을 보였다. 그러나 반복제어기의 이득을 언제 얼마나 줄여야 하는지 혹은 조정해야 하는지는 지금까지 검토된 바 없다. 그리고 Inoue의 균일한 가중치를 갖는 고차 반복 함수(higher order repetitive function)도 비효율적이라고 사료된다.

따라서 본 논문에서는 하모닉 오차(harmonic errors)뿐만 아니라 비하모닉 오차(non-harmonic errors)도 포함하는 오차 스펙트럼을 효율적으로 감소시킬 수 있는 두가지 이산 반복 제어 시스템을 해석하고 설계하였다. 첫째는 기존 및 수정 반복 제어 시스템(conventional and modified repetitive control system)에 대하여 새로운 이득 조정 알고리즘(gain scheduling algorithm)을 제안하였는데, 여기서 반복제어기의 이득은 주파수 영역에서 오차의 최대 노름(infinite norm)을 줄일 수 있도록 조정된다. 이를 위해 반복제어기 적용전 오차 스펙트럼에 대한 반복제어기 적용후 오차 스펙트럼의 비로 정의되는 상대오차 전달함수의 개념을 새롭게 도입하였다. 둘째는 이득 조정 반복제어 시스템의 대안으로, 고차 반복 함수의 차수별 가중치를 균일하게 하는<sup>[6]</sup>대신, 상대오차 전달함수 자체의 최대 노름을 최소화시키기 위한 조건으로서 얻어지는 가중치가 적용된 고차 반복제어 시스템(repetitive control system with higher order repetitive function)을 해석하고 설계하였다.

제안된 두 가지 방법에 대한 유효성을 확인하기위해 일반적 인 디스크 드라이브의 헤드 위치 제어 시스템에 대한 모사실험 결과를 보였다.

## 2 기존 및 수정 반복제어 시스템에 대한 이득조정 알고리즘

그림 1과 같은 기존의 선형 SISO 이산 반복제어 시스템을 고려하자. 그림 1에서 R(Z)는 기준 입력의 Z변환, C(Z)는 출력의 Z변환, E(Z)는 오차의 Z변환, Gr(Z)는 반복제어기의 전달함수, Go(Z)는 피제어 시스템의 전달함수, Gi(Z<sup>-1</sup>)는 완벽한 피제어 시스템의 모델링이 가능할 경우 Gs(Z) ≡ Go(Z)/(1+Go(Z))의 역전달함수로 선택된다. 그리고 Kr, Z<sup>-N</sup>, T, NT는 각각 반복제어기의 이득, 시간 지연 요소, 샘플링 시간, 반복 주기를 나타낸다. 여기서 반복 주기는 하모닉 오차의 기본 주파수(fundamental frequency)의 주기와 같다.

주기성을 갖으며 그 주파수가, 정수 k에 대해, 2πk/(NT) [rad/sec]인 신호를 하모닉 신호(harmonic signal)라고 하고 그렇지 않은 모든 신호를 비하모닉 신호(non-harmonic signal)라고 하자.

Gs(Z<sup>-1</sup>)는 다음식에 의해 주어진다고 하자.

$$G_s(Z^{-1}) = \frac{B(Z^{-1})}{A(Z^{-1})}, \quad (1)$$

여기서 A(Z<sup>-1</sup>)와 B(Z<sup>-1</sup>)는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$A(Z^{-1}) \equiv 1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_n Z^{-n},$$

그리고

$$B(Z^{-1}) \equiv b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_m Z^{-m} \equiv B^*(Z^{-1}) B^-(Z^{-1}),$$

식(1)에서 B\*(Z<sup>-1</sup>)와 B<sup>-</sup>(Z<sup>-1</sup>)는 각각, B(Z<sup>-1</sup>)의 cancellable 부분과 uncancellable 부분이다. 즉 B<sup>-</sup>(Z<sup>-1</sup>)와 B\*(Z<sup>-1</sup>)는 각각 복소수 평면에서 단위원 위 혹은 밖에 있는 B(Z<sup>-1</sup>)의 해와 단위원 안에 있는 B(Z<sup>-1</sup>)의 해로 구성된다. 그리고 Gi(Z<sup>-1</sup>)는 다음과 같이 모델링된다고 하자.

$$G_i(Z^{-1}) = \frac{A(Z^{-1}) \cdot B^-(Z^{-1})}{B^*(Z^{-1}) \cdot b}, \quad (2)$$

여기서 b는 다음과 같이 주어지는 부등식을 만족하는 상수다.<sup>[5]</sup>

$$b \geq \max_{\omega \in [0, \pi]} |B^-(e^{-j\omega})|^2.$$

식(2)에 있는 B<sup>-</sup>(Z)는 B<sup>-</sup>(Z<sup>-1</sup>)의 Z<sup>-1</sup>에 Z를 대입한 것이다. 또한 그림 1의 전체 시스템의 폐루프 전달함수 Gcl(Z)는 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$G_{cl}(Z) = \frac{(1 + Gr(Z))Go(Z)}{1 + (1 + Gr(Z))Go(Z)} = \frac{(1 - Z^{-N} + KrZ^{-N}Gi(Z))Gs(Z)}{1 - Z^{-N} + KrZ^{-N}Gi(Z)Gs(Z)} \quad (3)$$

식(1)과 식(2)를 식(3)의 분모에 대입하여 정리하면 다음과 같은 특성방정식을 얻을 수 있다.

$$A(Z^{-1})B^*(Z^{-1}) \left[ 1 + Z^{-N} \left( \frac{Kr B^-(Z) B^-(Z^{-1})}{b} - 1 \right) \right] = 0. \quad (4)$$

그리고 오차 전달함수 Ge(Z)를 Ge(Z) ≡ 1 - Gcl(Z)로 정의하면 Ge(Z)는 다음과 같은 식의 형태로도 표현될 수 있다.

$$G_e(Z) \equiv Gre(Z)Geo(Z),$$

여기서 Geo(Z) ≡ (1 - Gs(Z))는 반복 제어기 Gr(Z)이 적용되지 않았다고 했을 경우의 오차 전달함수에 해당되고, Gre(Z) ≡ 1/(1 + Gr(Z)Gs(Z))는 Ge(Z)와 Geo(Z)의 비로 표현되므로 Gre(Z)를 “상대오차 전달함수(relative error transfer function)”라고 명명하자.

참고로 식(3)에서 Kr=1이면 Gre(Z)는 [6]에서 제안한 “frequency response of the error to the disturbance”와 같게 된다. 이런 의미에서 Gre(Z)는 “frequency response of the error to the disturbance”의 일반적인 표현이라고 하겠다.

이제 그림 1의 반복제어 시스템에 대한 안정성, 하모닉 오차의 점근적 수렴성 및 수렴속도를 분석하기로 하자.

정리 2.1<sup>[5]</sup> : Gs(Z<sup>-1</sup>)가 점근적으로 안정하고 Kr이 다음과 같은 식을 만족하면 식(3)의 반복 제어 시스템은 안정하다.

$$0 < Kr < 2. \quad (5)$$

정리 2.2 : 식(3)의 반복제어 시스템에서 Gs(Z)가 점근적으로 안정하고 0 < Kr < 2 이면 하모닉 오차는 점근적으로 0에 수렴한다.

증명. Z = exp(jωT)에서 Gre(Z)는 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$G_{re}(Z) = \frac{1 - Z^{-N}}{(1 - Z^{-N}) + Kr Z^{-N} \left\{ \frac{A(Z^{-1}) B^-(Z)}{B^*(Z^{-1}) b} \right\} \left\{ \frac{B(Z^{-1})}{A(Z^{-1})} \right\}} \Bigg|_{Z = \exp(j\omega T)} \quad (6)$$

하모닉 오차는, 정수 k에 대해, ω = 2πk/(NT)에서만 일어나므로 Z<sup>-N</sup>는 1이어야 한다. Gs(Z)가 점근적으로 안정하고 0 < Kr < 2이므로 Gre(Z)는 정리 2.1에 의해 점근적으로 안정하다. 따라서 하모닉 주파수에서 Gre(Z)는 0이 되고, Ge(Z) = Gre(Z)Geo(Z)이므로 Ge(Z)는 0이 된다. 증명끝. □

참고로 정리 2.2로부터 반복제어 시스템의 출력은 하모닉 주파수를 갖는 기준 입력을 완벽하게 추종할 수 있음을 알 수 있다.

따름정리 2.3 : 식(3)의 반복제어 시스템에서  $G_s(Z)$ 가 점근적으로 안정하고,  $0 < Kr < 2$  이고,  $|G_i(Z)G_s(Z)| = 1$ 이고,  $\angle(G_i(Z)G_s(Z)) = 0$  이면 오차의 최대 수렴속도는  $Kr=1$  일 때 보장된다.

증명.  $|G_i(Z)G_s(Z)| = 1$ ,  $\angle(G_i(Z)G_s(Z)) = 0$ ,  $0 < Kr < 2$ , 그리고  $G_s(Z)$  가 점근적으로 안정하다는 가정하에 식(6)의 특성 방정식은 다음과 같이 다시 쓰여질 수 있다.

$$Z^N + (Kr-1) = 0 \quad (7)$$

$Kr=1$ 일 때 식(7)의 모든 근이 원점에 있다. 증명 끝. □

정리 2.2로부터 하모닉 오차는 반복제어 효과로 제거될 수 있음을 알 수 있다. 그러나 불행 하게도 하모닉 오차를 제거시키기위해 이런 반복제어기가 적용될 때 비하모닉 오차는 때때로 증폭될 수 있다. 이런 문제점을 완화시키기 위해 Inoue<sup>[6]</sup>는 반복제어기의 이득감소가 하나의 대책이 될 수 있음을 보였다. 그러나 언제 얼마나 이득을 감소속은 조정해야 하는지는 지금까지 논의된 바 없다. 따라서 우리는 하모닉 오차와 비하모닉 오차를 동시에 줄일 수 있는 반복제어기의 이득 조정 알고리즘을 제안하고자 한다. 이때 제어기의 이득은 상대오차 전달함수의 정량적 분석에 근거하여 오차의 최대 노음을 줄이기 위해 조정된다.

$E_o(Z)$ 는 다음과 같이 반복제어기가 적용이 되지않은 상태의 오차 전달함수라고 놓자.

$$E_o(Z) = G_eo(Z)R(Z).$$

$E(Z) = G_e(Z)R(Z)$ 이고  $G_{re}(Z) = G_e(Z)/G_eo(Z)$ 이므로  $E(Z)$ 와  $E_o(Z)$ 의 관계는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$E(Z) = G_{re}(Z)E_o(Z). \quad (8)$$

$Z$ 를  $\exp(j\omega T)$ 로,  $\theta$ 를  $\omega NT$ 로 놓으면 식(6)의  $G_{re}(Z)$ 는  $Kr$ 과  $\theta$ 의 함수로 되며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E(Kr, \theta) = G_{re}(Kr, \theta)E_o(\theta). \quad (9)$$

$E(\theta)$ 의 최대 노음  $|E|_m$  을  $\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |E(\theta)|$ 로,  $|E|_m$  이 존재한 주파수  $\theta_m$ 을  $\arg(\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |E(\theta)|)$ 로 정의하자. 그러면  $Kr$ 을 다음과 같이 조정함으로써  $|E|_m$ 을 감소시킬 수 있음을 보일 수 있다.

정리 2.4 : 식(3)의 반복제어 시스템에서  $0 < Kr < 2$  이고,  $|G_i(Z)G_s(Z)| = 1$  이고,  $\angle(G_i(Z)G_s(Z)) = 0$  이고,  $G_s(Z)$ 가 점근적으로 안정하다는 가정하에서,  $\forall Kr(|G_{re}(Kr, \theta_m)|) < 0$  일 때  $Kr$ 을 증가시키면, 혹은  $\forall Kr(|G_{re}(Kr, \theta_m)|) > 0$  일때  $Kr$ 을 감소시키면  $|E|_m$ 은 감소한다.

증명 : 식(9)로부터  $\theta = \theta_m$ 일때  $E(Kr, \theta)$ 의 크기는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$|E(Kr, \theta_m)| = |G_{re}(Kr, \theta_m)||E_o(\theta_m)| = |E|_m. \quad (10)$$

그리고  $|E(Kr, \theta_m)|$ 의  $Kr$ 에 대한 미분은 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$\delta(|E(Kr, \theta_m)|) = \frac{\partial(|G_{re}(Kr, \theta_m)|)}{\partial(Kr)} \delta(Kr) |E_o(\theta_m)|. \quad (11)$$

식(11)로부터  $\delta(Kr) > 0$  이고  $\forall Kr(|G_{re}(Kr, \theta_m)|) < 0$  이면 혹은  $\delta(Kr) < 0$  이고  $\forall Kr(|G_{re}(Kr, \theta_m)|) > 0$  이면  $\delta(|E(Kr, \theta_m)|) < 0$  임을 알 수 있다. 증명 끝. □

참고로 정리 2.4로부터  $\theta_m$  및  $\forall Kr(|G_{re}(Kr, \theta_m)|)$ 의 부호만 주어진다면  $Kr$ 의 증감에 따른  $|E|_m$ 의 증감여부가 결정됨을 알 수 있다.  $\theta_m$ 는 short time Fast Fourier Transform<sup>[11]</sup> 혹은 filter banks<sup>[11]</sup>로써 구할 수 있다. 그리고  $\forall Kr(|G_{re}(Kr, \theta_m)|)$ 의 부호 또한  $|G_{re}(Kr, \theta_m)|$ 의 정량적 분석에 기초하여 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다.

비하모닉오차의 거동을 쉽게 관찰하기 위하여  $|G_i(Z)G_s(Z)| = 1$  이고  $\angle(G_i(Z)G_s(Z)) = 0$  라고하자. 그러면  $G_{re}(Kr, \theta)$ 는 다음 식에 의해 얻어질 수 있다.

$$G_{re}(Kr, \theta) = \frac{1 - \exp(-j\theta)}{1 - \exp(-j\theta) + Kr \exp(-j\theta)}. \quad (12)$$

그리고 이때  $|G_{re}(Kr, \theta)|$ 는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$|G_{re}(Kr, \theta)| = [(\alpha / (Kr^2 - \alpha Kr + \alpha))]^{1/2}, \quad (13)$$

여기서  $\alpha = 4 \cos^2(\theta/2)$ 다. 식(13)의  $|G_{re}(\theta)|$ 는 기본 주파수  $\omega_0$ 가  $\omega_0 = 2\pi/(NT)$ 인 주기성 우함수(even periodic function)이므로, 자연수  $k$  에 대해  $B_k = \{\omega | \omega_0 k \leq \omega \leq \omega_0(k+1)\}$ 는  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 의 표준화된 주파수영역(normalized frequency region)으로 사상(mapping)될 수 있다. 따라서  $\theta$ 가 0 혹은  $2\pi$ 인 주파수는 하모닉 주파수에 해당되고,  $\theta$ 가 0과  $2\pi$ 이외인 주파수는 비하모닉 주파수에 해당된다. 이제  $\forall Kr(|G_{re}(Kr, \theta_m)|)$ 의 부호를 쉽게 찾기위해 고정된  $\theta$ 에 대해  $Kr_0 \in (0, 2)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$Kr_0 = \arg(\max_{0 < Kr < 2} |G_{re}(Kr, \theta)|).$$

그러면  $Kr_0$ 는 다음과 같이 결정될 수 있다.

$$Kr_0 = 1 - \cos\theta \quad (14)$$

식(14)는 다음 방정식의 연산결과로 얻어졌다.

$$V_{Kr}(|Gre(Kr, \theta)|) = \frac{(\alpha - 2Kr)\alpha^{1/2}}{2(Kr^2 - \alpha Kr + \alpha)^{3/2}} = 0. \quad (15)$$

식(14)와 식(15)로 부터 고정된  $\theta$ 에서  $Kr \leq Kro$ 이면  $V_{Kr}(|Gre(Kr, \theta)|) \geq 0$ 이고  $Kr > Kro$  이면  $V_{Kr}(|Gre(Kr, \theta)|) < 0$ 임을 알 수 있다.  $\theta_m$ 이 알려지면  $Kro$ 는 식(14)를 계산함으로써 알 수 있다. 따라서 현재 적용된  $Kr$ 과  $Kro$ 를 비교함으로써  $V_{Kr}(|Gre(Kr, \theta_m)|)$ 의 부호는 쉽게 판별될 수 있다.

좀 더 심도깊은 논의를 위하여 여러가지 고정된  $Kr$ 에 대한  $Gre(Kr, \theta)$ 의 크기를 그림 2에 나타냈고, 여러가지 고정된  $\theta$ 에 대한  $Gre(Kr, \theta)$ 의 크기를 그림 3에 나타냈다. 참고로 그림 2와 그림 3으로부터  $|Gre(Kr, \theta)|_m$ 로 표현되는  $Gre(Kr, \theta)$ 의 최대노음은  $Kr$ 이 단조감소함에 따라 단조감소함을 알 수 있다. 이는 다음과 같이 주어지는  $|Gre(Kr, \theta)|_m$ 을 계산함으로써 보여질 수 있다.

$$|Gre(Kr, \theta)|_m = 2/(2-Kr), \text{ at } \theta = \pi. \quad (16)$$

따라서  $\theta = \pi$ 의 비하모닉 주파수에서  $|Gre(Kr, \theta)|_m$ 를 줄이기 위해서는  $Kr$ 을 가능한 작게 해야만 한다. Inoue<sup>[6]</sup>에 의해 제안된 이득감소기법은 바로 이런 현상을 근거로 한 것이다. 그러나 보조정리 2.3에 의해  $Kr$ 의 감소는 오차의 수렴특성을 악화시킨다. 바로 이런 trade-off 때문에  $Kr$ 을 선택하는데 어려움이 따르게 된다. 더구나 현실적으로 흔히 일어날 수 있는 경우로써,  $\theta \approx \pi$ 이면 Inoue의 단순한 이득감소기법은  $|Gre(\theta)|$ 의 감소를 보장할 수 없다. 실제로 디스크 드라이브 헤드 위치제어 시스템<sup>[3, 4]</sup>에서  $|E(\theta)|$ 의 비하모닉 주파수 성분은 스피들 모터의 불 배어링의 기계적 특성에 의해 나타나는 수 개의 분명한 비하모닉 주파수<sup>[10]</sup>와 white noise로 이루어져 있기때문에 단순한 이득감소기법은 현실적으로 적용하기 어렵다.

이상의  $Gre(Kr, \theta)$ 의 정량적 분석에 근거하여 주파수 영역에서 최대노음을 줄일 수 있는 다음과 같은 이득조정 알고리즘을 제안하고자 한다.

**알고리즘 I:** 식(3)으로 표현되는 반복제어 시스템에 대하여 tolerance bound  $\epsilon > 0$  와 이득 조정폭  $\Delta Kr > 0$ 를 적절히 선정한다.  $i$ 는 반복횟수(the number of iteration)를 나타낸다.  $|E|_m(i)$ ,  $Kr(i)$ ,  $\theta_m(i)$  그리고  $Kro(i)$ 를  $|E|_m$ ,  $Kr$ ,  $\theta_m$  그리고  $Kro$ 의  $i$  번째 값이라고 하자. 초기화를 위하여  $i=1$ ,  $|E|_m(0)=0$ 이라고 하자. 그리고 따름정리 2.3과 같이 빠른 오차 수렴속도를 위해  $Kr(1)$ 을 1로 하자.

While ( $|E|_m(i) - |E|_m(i-1)| / |E|_m(i) > \epsilon$ ) {  
Do Find  $|E|_m(i)$  and  $\theta_m(i)$  by a spectrum analysis of  $E(i)$ .  
Compute  $Kro(i)$  by substituting  $\theta_m(i)$  into Eq.(14).  
Update  $Kr(i+1)$  such that

$$Kr(i+1) = \begin{cases} Kr(i) + \Delta Kr, & \text{for } (Kr(i) - Kro(i)) > 0 \\ Kr(i) - \Delta Kr, & \text{for } (Kr(i) - Kro(i)) \leq 0 \end{cases}$$

Update the iteration number as  $i=i+1$  }

End

이상의 기존 반복제어기의 설계에 대한 논의는 시스템의 전달함수  $G_s(Z^{-1})$ 의 완벽한 모델링이 가능하다는 가정하에 진행되어 왔다. 그러나  $G_s(Z^{-1})$ 의 모델링과정에는  $G_s(Z^{-1})$ 의 모델링 불확실성(modelling uncertainties in identifying  $G_s(Z^{-1})$ )이 있기 마련이다. 그래서 이와 같은 모델링 불확실성에 대한 시스템의 강인성(robustness)확보를 위하여 그림 4와 같이 저역통과 필터가 적용된 여러가지 수정 반복제어 시스템(modified repetitive control systems)<sup>[1, 3, 4]</sup>이 제안되어왔다. 그림 4의 저역통과 필터로서 다음과 같이 주어지는 FIR 저역통과 필터가 주어진다고 하자.

$$q(Z) = \frac{1}{L+2} (L + Z^{-1} + Z), \quad (17)$$

여기서  $L$ 은 통상 2, 4, 혹은 6으로 선택되며,  $q(Z)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$|q(Z)| \leq 1, \text{ and } \angle(q(Z)) = 0.$$

그러면 수정반복 제어시스템의 폐루프 전달함수  $G_{clm}(Z)$ 는 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$G_{clm}(Z) = \frac{(1+Gr)G_o}{1+(1+Gr)G_o} = \frac{\{1-Z^{-N}q(Z)+KrZ^{-N}q(Z)Gi(Z)\}G_s(Z)}{1-Z^{-N}q(Z)+KrZ^{-N}q(Z)Gi(Z)G_s(Z)}. \quad (18)$$

그리고 수정반복 제어시스템의 특성방정식은 다음식과 같이 얻어질 수 있다.

$$A(Z^{-1})B^*(Z^{-1}) \left\{ 1 + Z^{-N}q(Z) \left( \frac{Kr B^-(Z) B^-(Z^{-1})}{b} - 1 \right) \right\} = 0. \quad (19)$$

이제 수정 반복제어 시스템에 대한 안정성 및 오차의 수렴특성을 고찰하기로 한다.

따름정리 2.5<sup>[3, 4]</sup> :  $G_s(Z^{-1})$ 가 점근적으로 안정하고  $Kr$ 이 다음 식을 만족한다면 식(18)의 수정반복제어 시스템은 점근적으로 안정하다.

$$\left| \frac{Kr B^-(Z) B^-(Z^{-1})}{b} - 1 \right| < \frac{1}{|q(Z)|}. \quad (20)$$

수정 반복제어 시스템에서 오차 전달함수  $G_{rem}(Z)$ 는 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$G_{rem}(Z) = \frac{1 - Z^{-N} q(Z)}{1 - Z^{-N} q(Z) + Kr Z^{-N} q(Z) Gi(Z)G_s(Z)}. \quad (21)$$

그리고  $|Gi(Z)G_s(Z)| = 1$  이고  $\angle(Gi(Z)G_s(Z)) = 0$  이면

$G_{rem}(Z)$ 은 다음과 같이 다시 쓰여질 수 있다.

$$G_{rem}(Z) = \frac{1 - Z^{-N} q(Z)}{1 - Z^{-N} q(Z) + Kr Z^{-N} q(Z)} \quad (22)$$

**따름정리 2.6 :** 식(18)의 수정 반복제어 시스템에서  $G_s(Z)$ 가 점근적으로 안정하고  $Kr$ 이 식(20)을 만족하고  $|G_i(Z)G_s(Z)|=1$ ,  $\angle(G_i(Z)G_s(Z)) = 0$  이고  $q(Z)$ 가 식(17)에 의해 주어지면 하모닉 오차는 점근적으로 작아진다.

**증명.**  $|G_i(Z)G_s(Z)| = 1$  이고  $\angle(G_i(Z)G_s(Z)) = 0$  이고  $\angle(q(Z)) = 0$  이므로 하모닉 주파수에서  $|G_{rem}(Z)|$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$|G_{rem}(Z)| = \frac{1 - |q(Z)|}{1 - |q(Z)| + Kr|q(Z)|} \Big|_{Z=\exp(j\omega_0 kT)} \quad (23)$$

$G_s(Z)$ 가 점근적으로 안정하고  $Kr$ 이 식(20)의 부등식을 만족하므로  $G_{rem}(Z)$ 은 따름정리 2.5에 의해 점근적으로 안정하다. 그리고  $|q(Z)| \leq 1$  때문에, 하모닉 주파수에서  $|Gre| < 1$  이 된다. 증명 끝. □

참고로 따름정리 2.6으로부터  $|q(Z)| = 1$  인 경우는 식(3)으로 주어지는 기존의 반복제어 시스템에 해당됨을 알 수 있다. 수정반복 제어시스템의 경우 하모닉주파수에서  $|q(Z)| \neq 1$  이기 때문에  $|G_{rem}(Z)|$ 는 더 이상 0 이 아니다. 그리고 저역통과 필터 특성에 의해  $|q(Z)|$ 는 주파수가 증가할수록 작아지는데, 이때문에 하모닉 주파수에서 수정 반복제어 시스템의  $|G_{rem}(Z)|$ 는 기존의 반복제어 시스템의  $|Gre(Z)|$ 보다 커지게 된다. 다시말해 저역통과 필터링은 하모닉 주파수에서 반복제어 특성을 악화시킨다. 이제 식(3)과 같은 기존의 반복제어 시스템에 대해서와 마찬가지로 수정 반복제어 시스템에 대한 이득조정 알고리즘도 만들 수 있음을 보일 것이다. 이를 위해  $Z$ 는  $\exp(j\omega T)$ 이고  $\theta$ 는  $\omega NT$ 이며  $|q(Z)|$ 는  $q(\theta)$ 라고하자. 그러면 식(22)는 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$G_{rem}(Kr, \theta) = \frac{1 - \exp(-j\theta)q(\theta)}{1 - \exp(-j\theta)q(\theta) + Kr \exp(-j\theta)q(\theta)} \quad (24)$$

그리고  $|G_{rem}(Kr, \theta)|$ 는 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$|G_{rem}(Kr, \theta)| = [(\beta/(q(\theta)^2 Kr^2 - \gamma Kr + \beta))]^{1/2}, \quad (25)$$

여기서  $\beta = 1 + q(\theta)^2 - 2q(\theta)\cos(\theta)$ ,  $\gamma = 2q(\theta)^2 - 2q(\theta)\cos(\theta)$  이다. 다음과 같이 주어지는 방정식을 풀면

$$V_{Kr}(|G_{rem}(Kr, \theta)|) = \frac{(\gamma - 2q(\theta)^2 Kr)\beta^{1/2}}{2(q(\theta)^2 Kr^2 - \gamma Kr + \beta)^{3/2}} = 0, \quad (26)$$

$Kr$  는 다음과 같이 결정된다.

$$Kro = 1 - \cos\theta/q(\theta). \quad (27)$$

따라서 알고리즘 I에서 식(14)를 식(27)로 대치시키기만 하면 우리가 제안한 이득조정 알고리즘에 의해  $|E|_m$ 는 효과적으로 감소될 수 있다. 여기서 식(3)의 기존의 반복제어 시스템의 경우는  $\theta=0$  혹은  $2\pi$ 에서  $Kr \in (0, 2)$ 에 무관하게  $|E(\theta)|=0$  이 된다. 따라서 하모닉 오차는 이득조정과 관계가 없음을 알 수 있다. 그러나 식(18)의 수정 반복제어 시스템의 경우는 보조정리 2.6에서 기술한 바와 같이  $\theta=0$  혹은  $2\pi$ 에서  $|E(\theta)|$  이 더이상 0이 아니다. 오히려  $Kr$ 이 감소하면  $|E(\theta)|$ 이 증가되므로 단순한 이득감소기법은 더욱 현실적으로 적용되기 어렵다. 이런 의미에서 우리가 제안한 이득조정 알고리즘은 식(3)과 같은 기존의 반복제어 시스템에 적용될 때보다 수정 반복 제어 시스템에 적용될 때에  $|E(\theta)|_m$ 을 감소시키는 데에 있어서 결정적인 역할을 하게된다.

### 3 고차 반복제어 시스템의 설계

2장에서 제안한 이득조정법의 대안으로, 그림 5와 같이 비하모닉 오차성분을 줄일수 있는 고차 반복 함수가 적용될 수 있다.  $j$  차 반복함수  $W_j(Z)$ 가 다음과 같이 주어진다고 하자.

$$W_j(Z) = \sum_{i=1}^j w_i Z^{-(i-1)N}, \quad (28)$$

여기서  $\sum_{i=1}^j w_i = 1$ ,  $0 \leq w_i \leq 1$ ,  $|W_j(Z)| \leq 1$  이다. 그리고 식(18)의  $q(Z)$ 를 식(28)의  $W_j(Z)$ 로 대치하면 페루프 전달함수  $G_{clh}(Z)$ 는 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$G_{clh}(Z) = \frac{(1+Gr)G_o \{1 - Z^{-N}W_j(Z) + KrZ^{-N}W_j(Z)G_i(Z)\}G_s(Z)}{1 + (1+Gr)G_o \{1 - Z^{-N}W_j(Z) + KrZ^{-N}W_j(Z)G_i(Z)\}G_s(Z)} \quad (29)$$

이제 고차 반복제어 시스템에 대한 안정성 및 오차의 점근적 수렴특성 다음과 같이 얻어질 수 있다.

**따름정리 3.1 :**  $G_s(Z^{-1})$ 가 점근적으로 안정하고  $Kr$ 이 다음의 부등식을 만족한다면 식(29)의 고차 반복제어 시스템은 점근적으로 안정하다.

$$\left| Kr \frac{B^-(Z) B^-(Z^{-1})}{b} - 1 \right| < \frac{1}{|W_j(Z)|} \quad (30)$$

따름정리 2.5와 유사한 방법으로 쉽게 증명될 수 있으므로 여기서는 생략하기로한다.

**따름정리 3.2 :** 식(29)의 고차 반복제어 시스템  $G_{clh}(Z)$ 에서  $G_s(Z)$ 가 점근적으로 안정하고  $0 < Kr < 2$  이면 하모닉 오차는 점근적으로 0에 수렴한다.

따름정리 2.6와 유사한 방법으로 쉽게 증명될 수 있으므로

여기서는 생략하기로한다. 비하모닉 오차의 거동을 쉽게 관찰하기 위하여  $|G_i(Z)G_s(Z)| = 1$  이고  $\angle(G_i(Z)G_s(Z)) = 0$  이라고 하자. 그러면 식(22)의  $G_{rem}(Z)$ 의 유도과정과 유사한 방법으로  $G_{reh}(Z)$ 는 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$G_{reh}(Z) = \frac{1 - Z^{-N} W_j(Z)}{1 - Z^{-N} W_j(Z) + Kr Z^{-N} W_j(Z)} \quad (31)$$

참고로 [6]에서, Inoue는 고차 반복 함수에서  $w_i=1/j$  와 같이 균등한 가중치를 사용하면 전 영역의 주파수에서  $|G_{reh}(Z)|$ 의 제곱의 평균을 최소화 할 수 있음을 보였다. 그러나 특히 원하는 않는 신호가 과증폭(overamplified)될 수도 있으므로,  $|G_{reh}(Z)|$ 의 제곱의 평균의 최소화는 좋은 성능 평가 기준(performance measure)이라고 생각되지 않는다. 따라서 우리는  $|G_{reh}(Z)|$ 의 제곱의 평균의 최소화 대신  $|G_{reh}(Z)|$ 의 최대 노음의 최소화를 성능 평가 기준으로 선정하기로 한다. 이를 위해  $Z$ 를  $\exp(j\omega T)$ 라고하고  $\theta$  를  $\omega NT$ 라고 하면 식(31)은 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$G_{reh}(Kr, \theta, j, w_i) = \frac{1 - \exp(-j\theta) W_j(\theta)}{1 - \exp(-j\theta) W_j(\theta) + Kr \exp(-j\theta) W_j(\theta)} \quad (32)$$

여기서

$$W_j(\theta) = \sum_{i=1}^j w_i \exp(-i-1)j\theta \quad (33)$$

임의의 고정된  $Kr$  및  $j$ 에 대해  $Co(j, Kr)$ 를 다음과같이 정의하자.

$$Co(j, Kr) = (w_{o1}, w_{o2}, \dots, w_{oj}) \\ = \arg \left( \min_{0 \leq w_1, \dots, w_j \leq 1} \left( \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |G_{reh}(Kr, \theta, j, w_i)| \right) \right) \quad (34)$$

여기서  $Co(j, Kr)$ 는 식(32)의 상대오차 전달함수의 최대 노음을 최소화 시킬수 있는  $W_j(\theta)$ 의 가중치의 집합을 의미한다. 불행하게도 해석적으로  $Co(j, Kr)$ 를 구하는 것은 매우 어렵기 때문에 "evolution strategy"<sup>[12]</sup>라는 최적화 기법(optimization technique)을 적용하여 구하였다. 이 evolution strategy 기법은 주어진 경계조건(boundary conditions) 및 제한조건(constraints)하에서 확률적인 방법에 의해 목적함수(objective function)를 최소화 혹은 최대화 할 수 있다.  $Co(j, Kr)$ 를 구하는 데 있어서는 다음과 같은 식이 경계조건 및 제한조건으로 주어졌다.

$$\sum_{i=1}^j w_{oi} = 1, \text{ and } 0 \leq w_{oi} \leq 1, \text{ for } i=1, 2, \dots, j.$$

evolution strategy<sup>[12]</sup>에 의해 고정된 여러가지  $j$  및  $Kr=1$ 에 대해  $Co(j, Kr)$ 를 다음과 같이 얻을 수 있었다.

$$Co(2, 1) = (2/3, 1/3),$$

$$Co(3, 1) = (3/6, 2/6, 1/6),$$

$$Co(4, 1) = (4/10, 3/10, 2/10, 1/10),$$

$$Co(5, 1) = (5/15, 4/15, 3/15, 2/15, 1/15). \quad (35)$$

균일한 가중치가 적용된 시스템과 식(35)와 같이 우리가 제안한 가중치가 적용된 시스템의 성능을 비교하기 위해 균일한 가중치가 적용된 경우와 우리가 제안한 가중치가 적용된 경우 각각에 대해  $G_{reh}(Kr, \theta, j, w_i)$ 의 크기를 그림 6과 그림 7에 나타냈다. 그림 6과 그림 7로부터 우리가 제안한 가중치를 적용하면 같은  $Kr$  및  $j$ 에 대해  $|G_{reh}(Kr, \theta, j, w_i)|$ 의 최대 노음이 효과적으로 감소될 수 있음을 알 수 있다.  $Kr=1$ 일 때, 균일한 가중치가 적용된 경우와 우리가 제안한 가중치가 적용된 경우, 각각에 대해, 반복함수의 차수  $j$ 의 증가에 따른  $|G_{reh}(Kr, \theta, j, w_i)|$ 의 최대 노음의 변화를 그림 8에 나타내었다. 그림 8로부터, 우리가 제안한 가중치를 적용하고 반복 함수의 차수를 5로 선택했다고 했을 때의 오차 수준에 필적할만한 성능을 얻기 위해서는, 균일한 가중치를 적용한 경우, 반복 함수의 차수를 10 이상으로 해야만 한다는 사실을 알 수 있다. 따라서 우리가 제안한 가중치를 적용하면 균일한 가중치를 적용한 경우보다 상대오차 전달함수의 모양을 더 좋게 설계할 수 있음을 알 수 있다.

#### 4 예제

식(1)의  $G_s(Z^{-1})$ 가 다음과 같이 주어지는 일반적인 디스크 드라이브의 헤드 위치제어 시스템을 고려하기로 한다.

$$G_s(Z^{-1}) = \frac{5.01 - 14.0 Z^{-1} + 14.2 Z^{-2} - 6.0 Z^{-3} + 0.88 Z^{-4}}{1 - 0.874 Z^{-1} - 0.992 Z^{-2} + 0.882 Z^{-3}}$$

$|G_i(Z)G_s(Z)| = 1$  이고  $\angle(G_i(Z)G_s(Z)) = 0$ 이라고 하자. 그리고 sampling time은  $T$  그리고 디스크 드라이브의 sector 수는  $N$  이라고 하고  $T$ 와  $N$ 은 각각  $410 \mu\text{sec}$ , 41로 선택되었다고 하자.

예제 1 : 2장에서 제안한 이득조정 알고리즘의 유효성을 확인하기 위해  $E_o(\theta)$ 는 하나의 하모닉 주파수와 두개의 비하모닉 주파수로 구성되어 있고, 이 때 주파수는 0, 30 그리고 180 [degree] 라고 하고 그 크기는 각각 10, 1 그리고 0.728이라고 가정하자. 참고로  $E_o(\theta)$ 가 세 개의 주파수로 구성되어 있다는 가정은 일반적인 디스크 드라이브의 헤드 위치제어 시스템의 상황을 고려한 합리적인 가정이라고 할 수 있다. 왜냐하면 일반적인 디스크 드라이브의 헤드 위치제어 시스템에서 스피들 모터의 볼 베어링(ball bearings in the spindle motor)<sup>[10]</sup>의 기계적 특성에 의해 크기면에서 두드러지는 몇 개의 비하모닉

오차가 발생하기 때문이다. 그리고 알고리즘 I에서  $\Delta Kr$ 과  $\epsilon$ 은 0.1과 0.05로 각각 선택되었다고 하자. 그림 9는 반복횟수  $i$ 에 따른  $|E|_m(i)$  및  $Kr(i)$ 의 변화를 보여주고 있다.

그림 9로부터  $Kr(i)$ 와  $|E|_m(i)$ 가 각각 0.4와 0.9로 수렴해 감을 알 수 있다. 수렴된  $Kr$ 이 우리의 목적에 부합되는 타당한 값인지를 확인하기 위하여  $\theta = 0, 30, 180$  [degree]에 대해서  $E(kr, \theta) = Gre(Kr, \theta) E_0(\theta)$ 에 의해 계산한  $E(Kr, \theta)$ 의 크기를 그림 10에 나타냈다. 그림 10에서 보듯이  $Kr=0.4$ 일 때,  $|E|_m$ 이 최소가 되므로 우리가 제안한 이득조정 알고리즘이 유효하다는 사실이 확인되었다.

예제 2 : 수정 반복제어 시스템의 경우  $|E|_m$ 을 줄이는 데에 우리가 제안한 알고리즘이 매우 결정적인 역할을 담당하고 있음을 확인하자. 이를 위해 식(17)의 FIR 저역통과 필터가 다음과 같이 주어진다고 하자.

$$q(Z) = \frac{1}{4} (2 + Z^{-1} + Z^1).$$

그리고 예제 1과 같은  $E_0(\theta)$ ,  $\Delta Kr$ ,  $\epsilon$ 가 적용된다고 가정하자. 그림 11은 반복횟수  $i$ 에 따른  $|E|_m(i)$  및  $Kr(i)$ 의 변화를 보여주고 있으며 그림 12는  $\theta = 0, 30, 180$  [degree] 각각에 대해  $E(Kr, \theta)$ 의 크기를 보여주고 있다.

그림 11과 그림 12로부터  $Kr$ 이 0.5에 수렴하고  $|E|_m$ 은  $Kr=0.5$ 에서 최소가 됨을 알 수 있으므로 알고리즘 I은 수정 반복제어 시스템에 대해서도 유효함이 확인되었다. 여기서 참고로 하모닉 주파수에서  $|E|_m$ 은 더이상 0이 아니고  $Kr$ 의 함수라는 사실에 유의해야한다. 더우기  $Kr$ 은 단조감소함에 따라  $|E|_m$ 은 단조증가하므로 단순한 이득감소법은 적용될 수 없다. 그러나 우리가 제안한 이득조정 알고리즘은  $|E|_m$ 의 감소를 보장할 수 있다.

## 5 결론

하모닉 성분 뿐만 아니라 비하모닉 성분을 포함하는 오차 스펙트럼을 감소시킬 수 있는 두 가지 이산 반복제어 시스템을 해석하고 설계하였다. 하나는 새로운 이득조정 알고리즘으로 이는 상대오차 전달함수의 정량적 분석에 기초하여, 주파수영역에서 오차의 최대노출을 줄일 수 있도록 반복제어기의 이득을 조정하는 것이다. 제안된 알고리즘에 의해 하모닉 주파수와 비하모닉 주파수를 모두 포함하는 주파수영역에서 오차의 최대노출을 줄일 수 있음을 확인하였다. 그리고 우리가 제안한 이득조정 알고리즘은 기존 반복제어 시스템의 경우보다 수정 반복제어 시스템의 경우에 있어서, 오차의 최대노출을 줄이는 데에 더욱 결정적인 역할을 함을 알 수 있었다. 또한 이득조정 알고리즘이 적용된 반복제어 시스템의 대안으로서 고차 반복제어 시스템을 설계할 때에, 상대오차 전달함수의 최대 노출의 최소화 입장에서 얻어지는, 새로운 비균일 가중치를 적용한 경우가, [6]에서 제안한 균일한 가중치를 적용한

경우보다 더 실용적이라는 사실이 밝혀졌다.

본 연구는 일부 상공부 공업기반기술 지원

(과제 공고번호: 911-19-11)으로 수행되었습니다.

## REFERENCES

- [1] S. Hara, Y. Yamamoto, T. Omata, and M. Nakano, "Repetitive Control System : A New Type Servo System for Periodic Exogenous Signals," *IEEE Trans. AC-33*, pp.659-667, 1988.
- [2] T. Inoue, M. Nakano, and S. Iwai, "High Accuracy Control of a Proton Synchrotron Magnet Power Supply," *Proc. 8th IFAC World Cong., vol XX*, pp 216-221, 1981.
- [3] K. K. Chew and M. Tomizuka, "Digital Control of Repetitive Errors in Disk Drive Systems," *IEEE Control Systems Magazine*, pp 16-20, 1990.
- [4] K. K. Chew and M. Tomizuka, "Digital Control of Repetitive Errors in Disk Drive Systems," *Proc. Amer. Cont. Conf.*, pp 540-548, 1989.
- [5] M. Tomizuka, T. Tsao, and K. K. Chew, "Discrete-Time Domain Analysis and Synthesis of Repetitive Controller," *Proc. Amer. Cont. Conf.*, pp 860-866, 1988.
- [6] T. Inoue, "Practical Repetitive Control System Design" *Proc. of 29th IEEE Conf. on Desision and Control*, pp 1673-1678, 1990.
- [7] M. Tsai, G. Anwar, and M. Tomizuka, "Discrete Time Repetitive Control for Robot Manipulator," *Proc. of IEEE International Conf. on Robotics and Automation*, pp 1341-1346, 1988.
- [8] M. Gotou, E. Ueta, A. Nakamura, and K. Matsuo, "Development of Multirate Sampling Repetitive Learning Servo System and its Application to a Compact Camcorder," *IEEE/RSJ IROS*, pp 647-654, 1991.
- [9] C.A. Desoer and M. Vidyasagar, *Feedback Systems : Input-Output Properties*, Academic Press, 1975.
- [10] G. Bouchard, L. Lau, and F. E. Talke, "An Investigation of Non-Repeatable Spindle Runout," *IEEE Trans. Mag-23*, pp 3687-3689, 1987.
- [11] L. R. Rabiner and R. W. Schaffer, *Digital Processing of Speech Signals*, Prentice-Hall, 1978.
- [12] M. Kasper, "Shape Optimization by Evolution Strategy," *IEEE Trans. Mag-28*, pp 1556-1560, 1992.

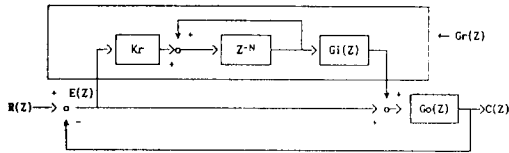


Fig.1 A conventional repetitive control system.

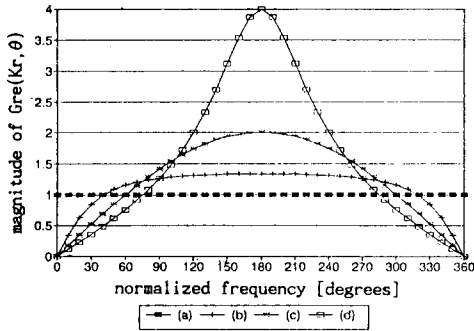


Fig. 2 Magnitude plots of  $Gre(Kr, \theta)$  for (a)  $Kr=0$ , (b)  $Kr=0.5$ , (c)  $Kr=1.0$  and (d)  $Kr=1.5$ .

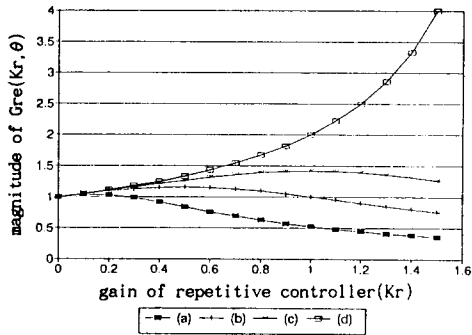


Fig. 3 Magnitude plots of  $Gre(Kr, \theta)$  for (a)  $\theta=30$ , (b)  $\theta=60$ , (c)  $\theta=90$  and (d)  $\theta=180$  degrees.

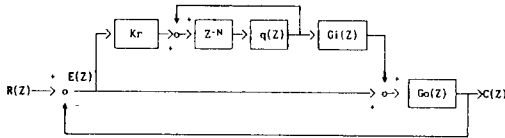


Fig. 4 A modified repetitive control system.

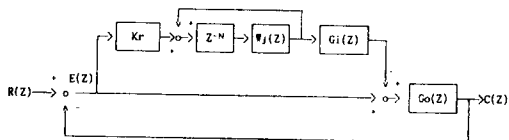


Fig. 5 A repetitive control system with higher order repetitive function.

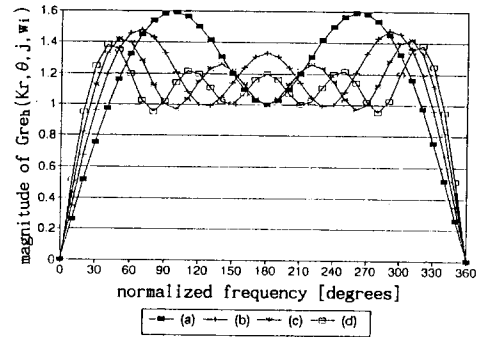


Fig. 6 Magnitude plots of  $Greh(Kr, \theta, j, w_i)$  in case of using equal weightings for (a)  $j=2$ , (b)  $j=3$ , (c)  $j=4$  and (d)  $j=5$ .

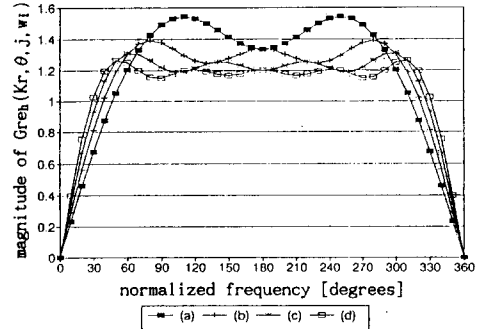


Fig. 7 Magnitude plots of  $Greh(Kr, \theta, j, w_i)$  in case of using proposed weightings for (a)  $j=2$ , (b)  $j=3$ , (c)  $j=4$  and (d)  $j=5$ .

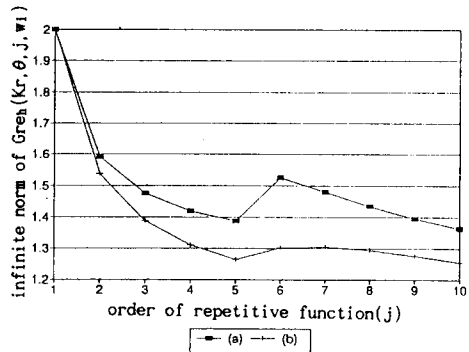


Fig. 8 Infinite norm of  $Greh(Kr, \theta, j, w_i)$  with respect to  $j$  for cases of (a) equal weightings and (b) proposed weightings.

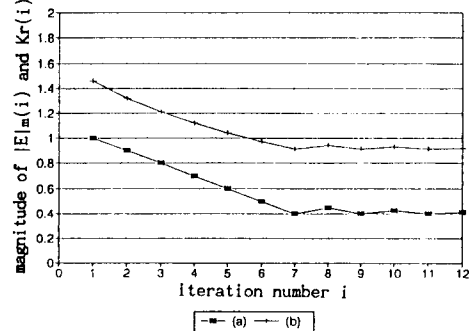


Fig. 9 Example 1: Magnitude plots of (a)  $|E_m(i)|$  and (b)  $Kr(i)$  with respect to the number of iterations.



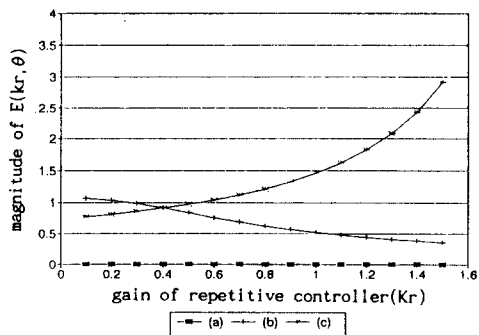


Fig. 10 Example 1: Magnitude plots of  $E(kr, \theta)$  for (a)  $\theta=0$ , (b)  $\theta=30$  and (c)  $\theta=180$  degrees.

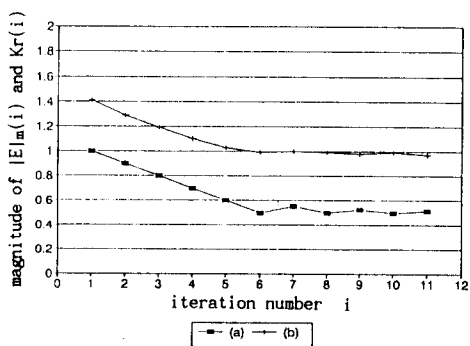


Fig. 11 Example 2: Magnitude plots of (a)  $|E|m(i)$  and (b)  $Kr(i)$  with respect to the number of iterations.

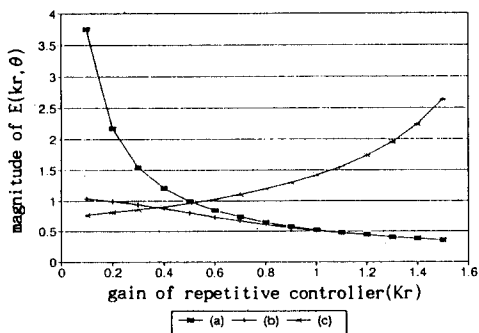


Fig. 12 Example 2: Magnitude plots of  $E(kr, \theta)$  for (a)  $\theta=0$ , (b)  $\theta=30$  and (c)  $\theta=180$  degrees.